
РАЧУНАРСКЕ ВЈЕЖБЕ ИЗ ФИЗИКЕ

Зоран Рајилић, Сретен Лекић
Природно-математички факултет Универзитета у Бањој Луци
Младена Стојановића 2, 78000 Бања Лука

ABSTRACT

RAJILIĆ, Z., LEKIĆ, S.: PHYSICS COMPUTER EXERCISES. *Skup, 1: Savremena univerzitetska nastava, Zbornik radova naučno-stručnog skupa, Trebinje, novembar 2003. 211-220, Banja Luka, 2004.* [Faculty of Natural Sciences and Mathematics of Banjaluka University, 78000 Banjaluka, 2 Mladena Stojanovića Street]

A manner of using Maple (a general purpose software developed at University of Waterloo in Canada) in computational physics exercises is shown. The intention is to improve understanding of physics at University level courses and increasing student skill of using computers in teaching, research and industry. The proposed computational exercises would be an addition to experimental and calculating ones.

САЖЕТАК

Показан је начин примјене софтвера Maple у рачунарским вјежбама из физике. Таквим вјежбама може се побољшати разумијевање физике и способност за примјену рачунара у настави, примјени и истраживању.

1. MAPLE

Maple је софтвер опште намјене (као Mathematica, Derive, Matlab) који се развија од 1980. године на Универзитету Вотерлу (Канада). Примјењује се у настави, истраживању и индустрији. Најновија верзија софтвера је Maple 9. Mapleов радни лист садржи текст, команде и резултате (симболи, бројеви, дијаграми). Врло лако се коригује и допуњава. Овде се предлаже кориштење Mapleа при посебним рачунарским вјежбама из физике које би се радиле уз експерименталне и рачунске.

Два су основна циља таквих вјежби:

- (1) боље разумијевање физике и
- (2) оспособљавање студената за примјену рачунара у истраживачком раду, примјени и настави.

Погледаћемо неколико примјера Mapleових радних листова.

2. СВЕМИРСКИ БРОД У БЛИЗИНИ ПЛАНЕТЕ

Свемирски брод чији погонски мотор не ради налази се у гравитационом пољу планете масе M . Свемирски брод може пасти на ту планету, постати њен сателит или проћи поред планете. Шта ће се десити од ове три могућности зависи о почетним условима.

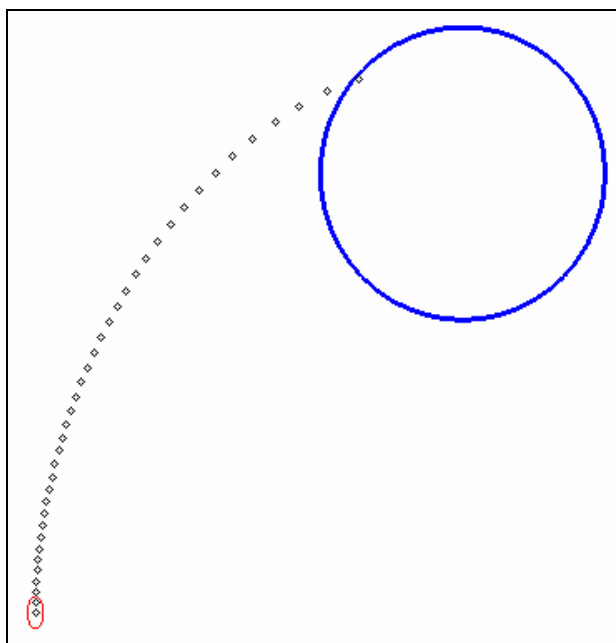
>restart:

>G:= 6.67e-11: M:= 9e24: # gravitaciona konstanta i masa planete

```

> x0:= -27e6: y0:= -27e6: # p. pol.
> with(plots):
> p1:= plot([9e6*cos(t), 9e6*sin(t), t=0..2*Pi], color=blue, thickness=3,
scaling=constrained): # crtanje planete
> sb:= plot([-27e6+5e5*cos(t), -7e6+10e5*sin(t), t=0..2*Pi], color=red,
scaling=constrained): # crtanje svemirskog broda
> jx:= diff(x(t), t, t)=-G*M*x(t)/(x(t)^2+y(t)^2)^(3/2): # x-komp. ubrzanja
> jy:= diff(y(t), t, t)=-G*M*y(t)/(x(t)^2+y(t)^2)^(3/2): # y-komp. ubrzanja
> pp1:= x(0)=x0, y(0)=y0, D(x)(0)=0, D(y)(0)=3e3: # p. uslovi
> rj1:= dsolve({jx, jy, pp1}, [x(t), y(t)], type=numeric):
> rj1(287.44);
[ t = 287.44, x(t) = -0.269877766758996620 108,  $\frac{d}{dt}x(t) = 85.7472441989835232$ ,
  y(t) = -0.261255878717318848 108,  $\frac{d}{dt}y(t) = 3084.36660640075252$  ]
> tr1:= pointplot({seq([rhs(rj1(206*k)[2]), rhs(rj1(206*k)[4])], k=0..38)}):
> display(p1, sb, tr1, axes=none); # pada na planetu

```



```

> pp2:= x(0)=x0, y(0)=y0, D(x)(0)=0, D(y)(0)=4.4e3: # novi p. uslovi
> rj2:= dsolve({jx, jy, pp2}, [x(t), y(t)], type=numeric):
> tr2:=
pointplot({seq([rhs(rj2(520*k)[2]), rhs(rj2(520*k)[4])], k=0..173)}):
> display(p1, sb, tr2, axes=none); # satelit
> pp3:= x(0)=x0, y(0)=y0, D(x)(0)=0, D(y)(0)=6e3: # novi p. uslovi
> rj3:= dsolve({jx, jy, pp3}, [x(t), y(t)], type=numeric):
> tr3:= pointplot({seq([rhs(rj3(306*k)[2]), rhs(rj3(306*k)[4])], k=0..77)}):
> display(p1, sb, tr3, axes=none); # prolazi pored planete

```

Лако је промијенити параметре M (маса планете), x_0 , y_0 (почетни положај свемирског брода), $D(x)(0)$, $D(y)(0)$ (почетна брзина свемирског брода) и погледати посљедице тих промјена.

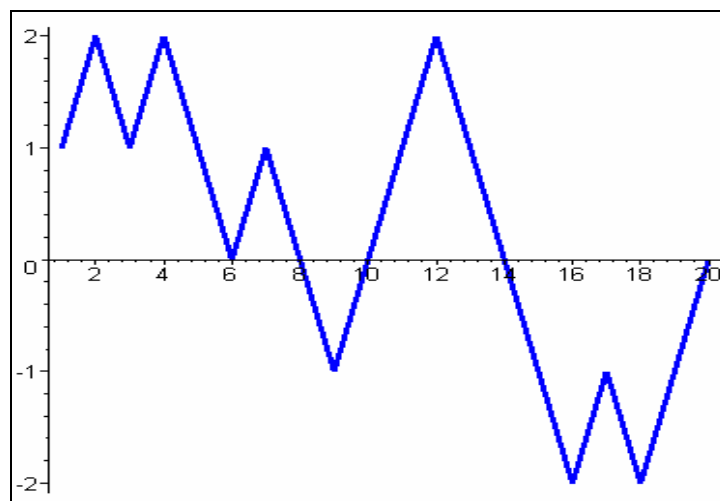
3. СЛУЧАЈНО КРЕТАЊЕ

Претпоставимо да се један човјек налази на мјесту $x_0=0$ и да бацањем новчића одлучује хоће ли направити један корак напријед и доћи на мјесто $x_1=1$ или један корак назад и доћи на мјесто $x_1=-1$. Поново баца новчић и одлучује о помјерању за 1 или -1. Након n корака човјек се налази на мјесту x_n . Ако овај експеримент понављамо, добићемо различите вриједности x_n , позитивне и негативне (средња вриједност је нула). Средња квадратна удаљеност (коријен средње вриједности квадрата x_n) једнака је коријену од n . Предвиђања теорије вјероватноће су тачнија што је већи број експеримената. Ово је један једноставан модел Брауновог кретања.

```
> restart:
> n:= 20: # broj koraka u jednom eksperimentu
> ne:= 750: # broj eksperimenata
> snj:= rand(0..1): # 0 ili 1 # procedura simulira bacanje nov.
> for k from 1 to n do for j from 1 to ne do delta[j,k]:=1-2*snj() od od:
> seq(delta[9,i],i=1..20); # koraci u devetom eksperimentu
-1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, 1

> for j from 1 to ne do xn[j]:=sum(delta[j,i],i=1..n) od:
> evalf(sum(xn[m],m=1..ne)/ne); # srednja vrijednost xn
-0.03200000000

> with(plots):
> listplot([seq(sum(delta[2,i],i=1..k),k=1..20)],color=blue,
thickness=3,xtickmarks=5); # kretanje u drugom eksperimentu
```



```
> restart:
> snj:=rand(0..1):
> d:= proc(ne) local k,j,xn,delta: for k from 1 to 100 do for j from 1 to
ne do delta[j,k]:=1-2*snj() od od: for j from 1 to ne do
xn[j]:=sum(delta[j,i],i=1..100) od: evalf(sqrt(sum(xn[m]^2,m=1..ne)/ne))
end: # broj koraka je 100, d(ne) je sred. kv. udalj. za ne eksperim.
> for p from 3 to 16 by 2 do ne=p,sku=d(p) od;
ne = 3, sku = 16.65332800
```

$ne = 5, sku = 12.42577965$

$ne = 7, sku = 6.718843437$

$ne = 9, sku = 7.659416861$

$ne = 11, sku = 9.629500128$

$ne = 13, sku = 7.825009213$

$ne = 15, sku = 8.640987595$

> for p from 100 to 400 by 50 do ne=p,sku=d(p) od;

$ne = 100, sku = 8.163332653$

$ne = 150, sku = 10.35116741$

$ne = 200, sku = 10.36243215$

$ne = 250, sku = 10.38306313$

$ne = 300, sku = 10.19084557$

$ne = 350, sku = 9.863062405$

$ne = 400, sku = 9.885342686$

Теорија вјероватноће предвиђа средњу квадратну удаљеност 10 (број корака је 100). За мален број експеримената (ne) добијамо резултате доста удаљене од 10. За велик број експеримената добијамо резултат врло близак предвиђању теорије вјероватноће.

4. АТОМ ВОДОНИКА

Густине електронске расподјеле атома водоника у појединим стањима изграђене су генерисањем специјалних функција које чине радијални (Лагерове асоциране функције) и угаони (Лежандрове асоциране функције) дио таласне функције водоника.

> restart:

> with(student):

Изградња Лежандрових полинома и Лежандрових коефицијената

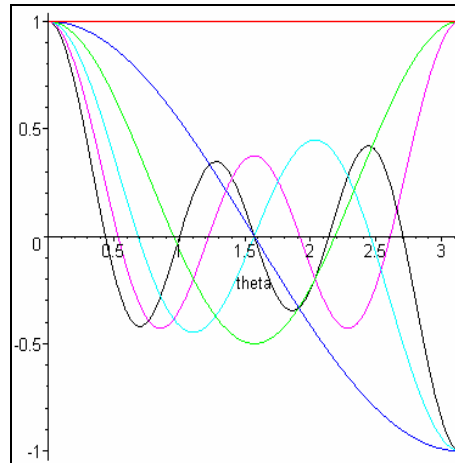
> lm:=5: P:=1:

> for l from 0 by 1 to lm do f:=(x^2-1)^l: for k from 0 by 1 to l do if (k>0) then P:=diff(f,x): f:=P end if: od;

p(l):=1/2^l/1!*P:p(l):=simplify(p(l)):Lek(l):=changevar(x=cos(theta),p(l)):Le(l):=sqrt((2*l+1)/2)*Lek(l): od:

Испртавање неколико Лежандрових коефицијената

```
> plot([Lek(0), Lek(1), Lek(2), Lek(3), Lek(4), Lek(5)],
theta=Pi..0, color=[red, blue, green, cyan, magenta, black], style=[line]);
```



Провјера ортонормираности Лежандрових коефицијената

```
> Int(Le(3)*Le(4)*sin(theta), theta=0..Pi);
```

$$\int_0^{\pi} \frac{3}{4} \sqrt{14} \left(\frac{5}{2} \cos(\theta)^3 - \frac{3}{2} \cos(\theta) \right) \sqrt{2} \left(\frac{35}{8} \cos(\theta)^4 - \frac{15}{4} \cos(\theta)^2 + \frac{3}{8} \right) \sin(\theta) d\theta$$

```
> int(Le(3)*Le(4)*sin(theta), theta=0..Pi);
```

0

```
> Int(Le(3)*Le(4)*sin(theta), theta=Pi..0);
```

$$\int_{\pi}^0 \frac{3}{4} \sqrt{14} \left(\frac{5}{2} \cos(\theta)^3 - \frac{3}{2} \cos(\theta) \right) \sqrt{2} \left(\frac{35}{8} \cos(\theta)^4 - \frac{15}{4} \cos(\theta)^2 + \frac{3}{8} \right) \sin(\theta) d\theta$$

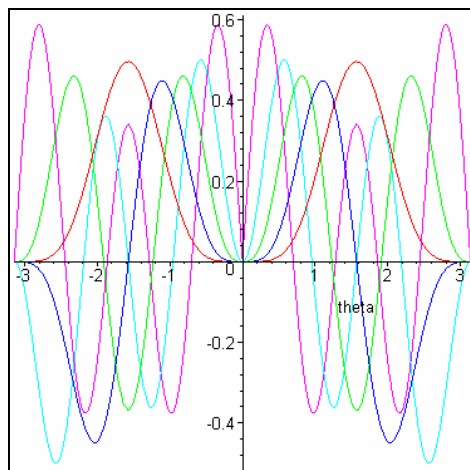
```
> int(Le(5)*Le(5)*sin(theta), theta=0..Pi);
```

1

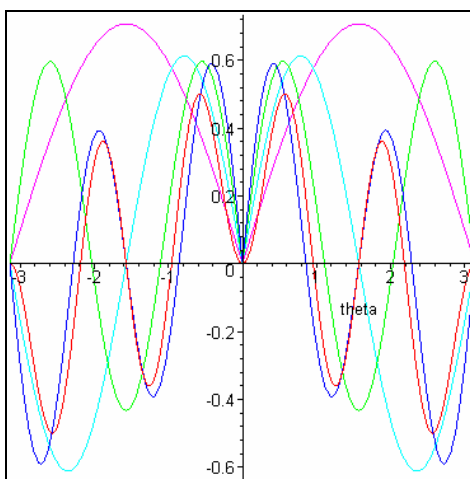
Изградња асоцираних Лежандрових полинома и коефицијената и испртавање првих неколико графова

```
> P:=1:
```

```
> for mx from 0 by 1 to 5 do:for l from mx by 1 to lm do f:=p(l): for m
from 0 by 1 to mx do if (m>0) then P:=diff(f,x): f:=P end if: od;
p(l,mx):=sqrt((lmx)!/(l+mx)!)*(1x^2)^(mx/2)*P:p(l,mx):=simplify(p(l,mx)):
Pe(l,mx):=changevar(x=cos(theta),p(l,mx)); od; od;
> for l from 1 by 1 to 5 do:for mx from 1 by 1 to l do : od: od:
> plot([Pe(5,5),Pe(5,4),Pe(5,3),Pe(5,2),Pe(5,1)],theta=Pi..Pi,
color=[red,blue,green,cyan,magenta], style=[line]);
```



```
> plot([Pe(5,2), Pe(4,1), Pe(3,1), Pe(2,1), Pe(1,1)],
theta=Pi..Pi, color=[red,blue,green,cyan,magenta,black], style=[line]);
```



```
> Int(Pe(4,3)*Pe(5,3), theta=0..Pi);
```

$$\int_0^{\pi} \frac{35}{64} (-1 + \cos(\theta)^2)^2 (1 - \cos(\theta)^2) \cos(\theta) (9 \cos(\theta)^2 - 1) d\theta$$

```
> int(Pe(4,3)*Pe(5,3), theta=-Pi..Pi);
```

0

```
> Int(Pe(5,4)*Pe(5,4), theta=0..Pi);
```

$$\int_0^{\pi} \frac{315}{128} (-1 + \cos(\theta)^2)^4 \cos(\theta)^2 d\theta$$

```
> int(Pe(5,4)*Pe(5,4)*sin(theta), theta=0..Pi);
```

$\frac{2}{11}$

```
> int(p(4,3)*p(5,3), x=-1..1);
```

0

Изградња Лагерових функција и асоцираних Лагерових функција

```
> nm:=5:
```

```
> f:=exp(-r)*r^n;
```

$$f := e^{(-r)} r^n$$

```
> L:=Diff(f,r);
```

$$L := \frac{\partial}{\partial r} (e^{(-r)} r^n)$$

```
> for n from 1 by 1 to nm do f:=exp(-r)*r^n: for k from 1 by 1 to n do
L:=diff(f,r): f:=L: od; la(n):=exp(r)*L:simplify(%) od:
```

```
> for n from 1 by 1 to 5 do:simplify(la(n)): od;
```

$$-r + 1$$

$$r^2 - 4r + 2$$

$$-r^3 + 9r^2 - 18r + 6$$

$$r^4 - 16r^3 + 72r^2 - 96r + 24$$

$$-r^5 + 25r^4 - 200r^3 + 600r^2 - 600r + 120$$

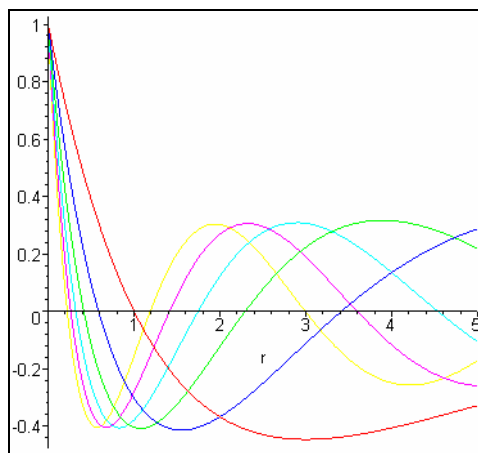
```
> lm:=5:
```

```
> for mn from 1 by 1 to lm do for n from mn by 1 to lm do f:=la(n): for k
from 1 by 1 to mn do laa:=diff(f,r): f:=laa: od: Laa(n,mn):=laa: od; od;
```

```
> for n from 1 by 1 to mn do f:=exp(-r)*r^n: for k from 1 by 1 to n do
L:=diff(f,r): f:=L: od; laf(n):=1/n!*exp(r/2)*L: od:
```

```
> for n from 1 by 1 to 5 do:for mn from 1 by 1 to n
do:simplify(Laa(n,mn)):Lrint(laa(n,mn)): od;od;
```

```
> plot([laf(1),laf(2),laf(3),laf(4),laf(5),laf(6),laf(7),laf(8)],
r=0..5,color=[red,blue,green,cyan,magenta,yellow,gray,black],
style=[line]);
```



Провјера ортогоналности Лагерових функција

```
> Int(laf(3)*laf(5), r=0..infinity);
```

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{720} \left(e^{\left(\frac{r}{2}\right)^2} \right)^2 \left(-e^{(-r)} r^3 + 9 e^{(-r)} r^2 - 18 e^{(-r)} r + 6 e^{(-r)} \right) \left(-e^{(-r)} r^5 + 25 e^{(-r)} r^4 - 200 e^{(-r)} r^3 + 600 e^{(-r)} r^2 - 600 e^{(-r)} r + 120 e^{(-r)} \right) dr$$

```
> int(laf(3)*laf(5), r=0..infinity);
```

0

```
> Int(laf(2)*laf(2), r=0..infinity);
```

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{4} \left(e^{\left(\frac{r}{2}\right)^2} \right)^2 \left(e^{(-r)} r^2 - 4 e^{(-r)} r + 2 e^{(-r)} \right)^2 dr$$

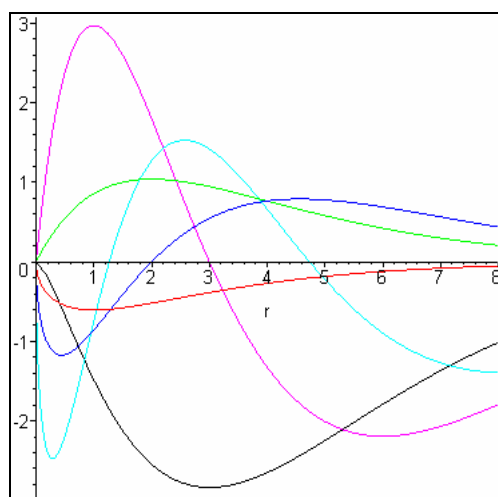
```
> int(laf(2)*laf(2), r=0..infinity);
```

1

```
> for mx from 1 by 1 to lm do for n from mx by 1 to lm do
```

```
Laaf(n,mx):=sqrt(1/n!)*exp(-r/2)*r^((mx)/2)*Laa(n,mx) od; od;
```

```
> plot([Laaf(1,1),Laaf(2,1),Laaf(2,2),Laaf(3,1),Laaf(3,2),Laaf(3,3)],  
r=0..8,color=[red,blue,green,cyan,magenta,black], style=[line]);
```



$$\int_0^{\infty} r \text{Laaf}(3,2) \text{Laaf}(4,2) dr$$

```
>
```

```
> int(Laaf(3,2)*Laaf(4,2), r=0..infinity);
```

0

```
> int(Laaf(3,2)*Laaf(3,2), r=0..infinity);
```

36

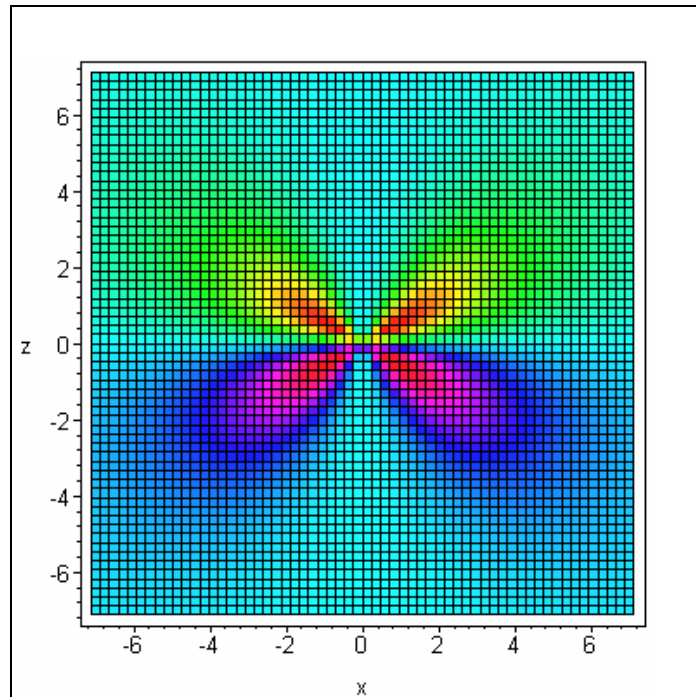
```
> with(plots):
```



```
>
psi:=subs(r=sqrt(x^2+z^2),sin(theta)=x/sqrt(x^2+z^2),cos(theta)=z/sqrt(x^
2+z^2),Laaf(1,1)*Pe(4,3)):
```

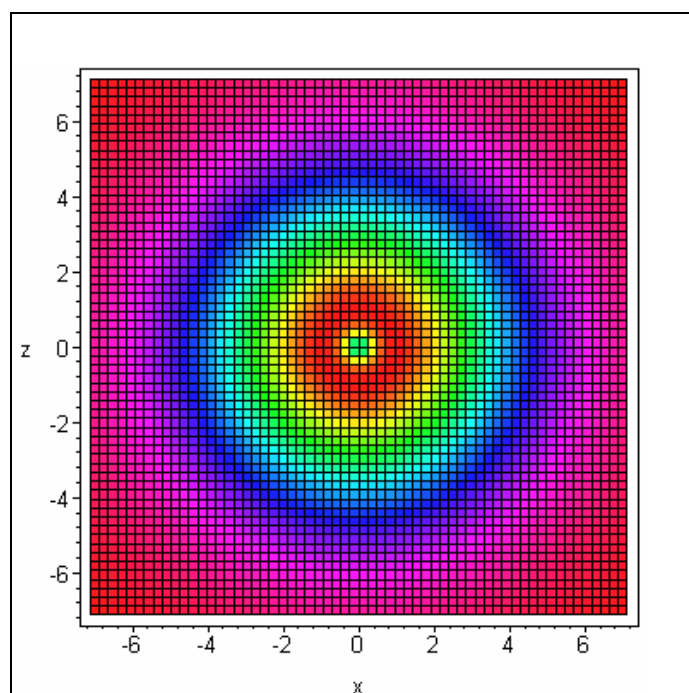
Испртавање густине електронске расподеле за пар стања водениковог атома

```
> densityplot(psi,x=-7..7,z=-7..7,axes=boxed,colorstyle=HUE,grid=[60,60]);
```



```
psi:=subs(r=sqrt(x^2+z^2),sin(theta)=x/sqrt(x^2+z^2),cos(theta)=z/sqrt(x^
2+z^2),Laaf(1,1)*Pe(0,0)):
```

```
> densityplot(psi,x=-7..7,z=-7..7,axes=boxed,colorstyle=HUE,grid=[60,60]);
```



ЗАКЉУЧАК

Рачунарске вјежбе из физике, које би се радиле као допуна експерименталним и рачунским вјежбама, могу унаприједити универзитетску наставу физике. Како се употреба софтвера Maple прилично лако учи, на таквим вјежбама је нагласак на разумијевању физике, а не на програмирању. Међутим, повећавање вјештине програмирања може такођер унаприједити рад будућег физичара у истраживању, настави или индустрији. На предложеним вјежбама подразумијева се велика активност студената који модификују команде и дискутују физикални смисао промијењених резултата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Austrian Center for Didactics of Computer Algebra, www.acdca.ac.at
2. Greene R 1995 Classical Mechanics with Maple (New York: Springer)
3. Maple Application Center, www.mapleapps.com
4. Maple on the Web, grtensor.phy.queensu.ca/maple2.html
5. Maplesoft, www.maplesoft.com